

Tipps und Tricks zum sicheren Rechnen

Wie rechnet man geschickt?
Klammerregeln üben

Rechengesetze

Datei Nr. 10011

Stand 10. April 2016

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Vorwort

Dieser Text soll den Lesern mehr Sicherheit im Rechnen vermitteln, indem gewisse Regeln und Methoden besprochen und geübt werden. Er ist für Schüler bzw. Eltern dieser Kinder gedacht, aber auch für Erwachsenenbildung, die nochmals einsteigen und natürlich auch diese Grundlagen erfahren müssen bzw. wollen.

Unter **Arithmetik** versteht man allgemein das **Rechnen und seine Gesetzmäßigkeiten**.

Ich gehe davon aus, dass jeder die Grundrechenarten Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren und Dividieren einigermaßen beherrscht – sonst ist er hier fehl am Platz. Ich kann hier nicht vermitteln, wie man addiert usw. Hier geht es darum, wie man kompliziertere Aufgaben berechnen kann. Dazu gibt es bestimmte Methoden, auch das Rechnen mit Klammern.

Wer weiß, dass man $257 - 14 - 16$ auf diese Weise $257 - (14 + 16) = 257 - 30 = 227$ berechnen kann? Oder, dass $12 \cdot 28 + 12 \cdot 32$ und $12 \cdot (28 + 32)$, also $12 \cdot 60$ dasselbe Ergebnis haben, und zwar 720?

Das und vieles mehr erfährt man hier, und kann es an vielen Trainingsaufgaben üben.

Also: Mit einigen Tricks kann man schnell Fortschritte erzielen.

Dazu erkläre ich viele Rechenregeln und Rechengesetze, die man hervorragend einsetzen kann, um günstiger, schneller und sicherer rechnen zu können.

Der folgende Text beschäftigt sich nur mit natürlichen Zahlen. Für Negative Zahlen, Bruchzahlen und Dezimalzahlen gibt es eigene Texte.

Es ist wichtig, die Textpassagen gründlich zu lesen, denn ich liefere Erklärungen, ohne die man nicht verstehen kann, was man lernen bzw. wissen sollte.

Es gibt für dieses Thema so viel zu berichten und zu üben, dass es schwierig ist, wegzulassen.

Daher muss der Leser selbst entscheiden, welchen Abschnitt er überspringen will. In vielen Fällen sind die Eltern gefragt, denn nicht jeder Fünftklässler wird in der Lage sein, diese Texte zu verstehen bzw. nachzuvollziehen.

Der Text Nr. 10012 „Rechenregeln“ ist eine sehr abgespeckte Kurzversion dieses Textes!

Für diejenigen, die nur einen Überblick haben wollen.

Zu diesem Text gehören Anschlusstexte wie:

- 10101 Teiler, Vielfache, Mengen
- 10102 Teilbarkeitsregeln
- 10103 Teilbarkeit – Textaufgaben
- 10120 Potenzen – Grundlagen
- 10121 Potenzen – Lernblatt
- 10131 Mengenlehre
- 10013 Einfache Gleichungen
- 10015 Textaufgaben zur Arithmetik
- 10151 Zahlssysteme (Dezimalsystem, Zweiersystem, Dreiersystem, Zwölfersystem, Hexadezimalsystem)
- 10152 Römische Zahlen

Inhalt

1. Addition	5
1. Kleiner Rechentest	5
Ergebnisse des Rechentests	6
2. Kommutativgesetz (Vertauschungsgesetz)	5
3. Assoziativgesetz (Verbindungsgesetz)	7
Schreibvorschrift für Berechnungen	7
Rechenvorteile durch Klammerregeln (Assoziativgesetz)	8
4. Kommutativgesetz und Assoziativgesetz gemeinsam verwenden	9
5. Weitere Rechentricks für Könner	10
2. Subtraktion	12
1. Kleiner Rechentest	12
Ergebnisse des Rechentests	14
2. Man kann nicht jede Subtraktion durchführen	12
3. Darf man bei der Subtraktion Zahlen vertauschen?	14
4. Subtraktion mehrerer Zahlen	14
Vorteilhaftes Subtrahieren, Rechengesetze	15
5. Subtraktion einer Differenz	16
6. Umkehrung von Rechenregeln	17
7. Subtraktion und Addition in einer Rechnung	18
8. Zerlegung von Zahlen bei Kopfrechnungen	19
9. Mehrfache schriftliche Subtraktion	20
3. Multiplikation	21
1. Kleiner Rechentest	21
Ergebnisse des Rechentests	22
2. Grundbegriffe Faktor und Produkt	21
3. Multiplikation als abgekürzte Addition gleicher Summanden	21
4. Kommutativgesetz	21
5. Multiplikation mit 1 und 0	21
6. Trickreiche Multiplikationen	22
7. Assoziativgesetz	23
8. Rechenvorteile	23

4. Division	25
1. Kleiner Rechentest	25
2. Grundbegriffe: Dividend, Divisor, Quotient	25
3. Die Division ist die Umkehrung der Multiplikation	25
4. Die Multiplikation ist die Umkehrung der Division	26
5. Durch Null kann man nicht dividieren	26
Ergebnisse des Rechentests	26
6. Teilbarkeit ohne Rest bzw. mit Rest	27
7. Teiler und Vielfache	27
8. Teilbarkeitsregeln	28
5. Hintereinanderausführung verschiedener Rechenoperationen	30
1. Additionen	30
2. Multiplikationen	30
3. Subtraktionen	30
4. Divisionen	31
5. Addition und Multiplikation in einer Rechnung	31
6. Distributivbesetze (Verteilungsgesetze)	32
7. Zusammenstellung einiger Klammerrregeln	35
6. Potenzieren	37
1. Einführung	37
2. Grundbegriffe	37
3. Kleiner Rechentest	37
Ergebnisse des Rechentests	38
4. Rechnen mit Potenzen	38
7. Alle Testaufgaben im Überblick	39
Und anschließend alle Lösungen	44

1. Addition

Zunächst einige Grundbegriffe:

Die zu addierenden Zahlen heißen Summanden.
Das Ergebnis einer Addition heißt die Summe.

1. Ich beginne mit einem kleinen **Rechentest**, der dir zeigen soll, wie sicher du rechnen kannst.

1. Test: Rechne im Kopf und notiere nur das Ergebnis:

- | | | |
|------------------|-------------------|----------------------|
| a) $23 + 17$ | b) $70 + 110$ | c) $89 + 12$ |
| d) $145 + 345$ | e) $99 + 98$ | f) $3500 + 350 + 35$ |
| g) $8344 + 1738$ | h) $79 + 77 + 75$ | i) $235 + 410 + 65$ |

2. Test Addiere schriftlich:

- | | | |
|--|--|---|
| a) $\begin{array}{r} 2797 \\ + 6225 \\ \hline \end{array}$ | b) $\begin{array}{r} 62621 \\ + 97488 \\ \hline \end{array}$ | c) $\begin{array}{r} 579 \\ + 835 \\ + 372 \\ \hline \end{array}$ |
|--|--|---|

Die Lösungen stehen auf der nächsten Seite.

Du kannst selbst an deinen Ergebnissen erkennen, ob du sicher addieren kannst.

2. Du weißt sicher, dass man beim Addieren **die beiden Summanden vertauschen darf**:

$12 + 8 = 20$	und	$8 + 12 = 20$	Es ist also	$12 + 8 = 8 + 12$
$35 + 20 = 55$	und	$20 + 35 = 55$	Es ist also	$35 + 20 = 20 + 35$

Das ist die erste einer ganzen Reihe von Rechenregeln oder Rechengesetzen, die einem dabei helfen können, schnell und sicher zu rechnen.

KG Das hier vorliegende Rechengesetz heißt **Kommutativgesetz** (Vertauschungsgesetz) der Addition. Es besagt, dass man bei der Addition die Reihenfolge zweier Zahlen vertauschen darf, ohne dass sich dabei das Ergebnis, also die Summe, ändert:

Man kann dazu „Platzhalter“ verwenden und sie mit beliebigen Zahlen füllen. Dabei gilt: Gleiche Zeichen müssen dieselbe Zahl erhalten:

$$\square + \bigcirc = \bigcirc + \square$$

Etwa so:

$$\boxed{7} + \boxed{5} = \boxed{5} + \boxed{7}$$

In der Regel verwendet man als Platzhalter Buchstaben, die man dann besser **Variable** nennt.

Das **Kommutativgesetz** kann man dann so aufschreiben:

$$a + b = b + a$$

Man kann auch andere Buchstaben verwenden.

Ergebnisse des Rechentests

1. Test: Kopfrechnung

a) $23 + 17 = 40$

b) $70 + 110 = 180$

c) $89 + 12 = 101$

Hier rechnet man $89 + 11 + 1 = 100 + 1 = 101$

d) $145 + 345 = 45 + 45 + 400 = 490$

Ich addiere $45 + 45$, dann noch $+ 400$.

e) $99 + 98 = 100 + 100 - 1 - 2 = 200 - 3 = 197$

Rechentrick:

Statt $99 + 98$ rechne ich $100 + 100$ und subtrahiere zum Ausgleich wieder 3.

f) $3500 + 350 + 35 = 3850 + 35 = 3885$

Ab jetzt kommen trickreiche Lösungen, die nicht jeder kann:

g) $8344 + 1738 = \underbrace{8300 + 1700}_{10000} + 40 + 40 + 2 = 10082$

Hier erkannte ich, dass man zunächst die letzten zwei Stellen we lässt und dann 10.000 erhält. Die noch fehlende Addition $44 + 38$ erledige ich so, dass ich $40 + 40$ rechne, dann habe ich bei der ersten Zahl 4 zu wenig und bei der zweiten 2 zuviel genommen, also $44 + 38 = 40 + 40 + 2 = 82$. So rechnen Köner ...

h) $79 + 77 + 75 = 3 \cdot 77 = 210 + 21 = 231$

Wenn man von 79 2 wegnimmt und

sie zu 5 addiert, heißt die Rechnung: $77 + 77 + 77$ oder kurz

$$3 \cdot 77 = 3 \cdot 70 + 3 \cdot 7 = 210 + 21 = 231$$

Wer mit 11 geschickt multiplizieren kann, rechnet vielleicht so:

$3 \cdot 77 = 3 \cdot 7 \cdot 11 = 21 \cdot 11 = 211 \cdot 1 = 231$ Das wird einige Seiten weiter hinten erklärt.

Das wird einige Seiten weiter hinten erklärt.

i) $235 + 410 + 65 = (235 + 65) + 410 = 300 + 410 = 710$

Auch dieser Trick wird noch ausführlich erklärt und geübt-

2. Test Schriftliche Addition

a)
$$\begin{array}{r} 2797 \\ + 6225 \\ \hline 9022 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{r} 62621 \\ + 97488 \\ \hline 160109 \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{r} 579 \\ + 835 \\ + 772 \\ \hline 2186 \end{array}$$

Die Rechentricks, die ich im 1. Test gezeigt habe, kennt sicher noch nicht jeder.

Aber im Laufe der nächsten 30 Seiten kann man sie und weitere erlernen.

Wichtig ist jedoch, dass du möglichst wenig Fehler gemacht hast.

3. Das nächste, noch wichtigere Gesetz heißt **Assoziativgesetz** (Verbindungsgesetz).

Dieses wirkt im Hintergrund mit, wenn man mehr als zwei Zahlen addiert.

Wir Menschen haben ein ganz tolles Gehirn. Es ist die fähigste Maschine der Welt, denn es gestattet uns, dass wir viele Dinge gleichzeitig tun können, ohne dass wir darüber nachdenken müssen.

Beispielsweise Klaus:

Der fährt mit seinem Rad durch die Gegend, hört über Kopfhörer Musik, isst zugleich einen Apfel und lacht seine Freundin an, die am Straßenrand steht. All das geht ziemlich automatisch gleichzeitig. Er denkt nicht darüber nach, wie er jetzt den Radlenker einstellen soll, damit er geradeaus fährt, er tritt automatisch in die Pedale, und zwar vorwärts und nicht rückwärts, er hört nebenbei seinen Lieblingslied und kaut seinen Apfel, ohne sich auf die Lippen zu beißen oder sich zu verschlucken. Woran er vielleicht am ehesten denkt, ist seine Freundin, die er sieht, und die er heute gerade mal wieder richtig cool findet.

Doch mit dem Rechnen geht das nicht so vielschichtig. **Wir addieren immer nur zwei Zahlen auf einmal**, nie gleichzeitig drei. Manches weiß man auswendig und erkennt daher ohne zu rechnen, dass $1 + 1 + 1 = 3$ ist. Dies haben wir im Kopf und wissen das Ergebnis 3.

Wenn wir aber $15 + 13 + 8$ berechnen sollen, müssen wir schrittweise vorgehen. Ich zeige zwei verschiedene Berechnungsmöglichkeiten. Dabei verwende ich Klammern.

Es ist vereinbart worden, dass man die Klammer zuerst berechnet.

1. Möglichkeit: $(15 + 13) + 8 = 28 + 8 = 36$

Hier wurden zuerst 15 und 13 addiert und zur Summe 28 dann 8.

Dies kann man so darstellen: $15 \xrightarrow{+13} 28 \xrightarrow{+8} 36$.

Oder auch so:
$$\begin{array}{r} (15 + 13) + 8 = 36 \\ \underline{28} \\ 36 \end{array}$$

2. Möglichkeit: $15 + (13 + 8) = 15 + 21 = 36$ d. h. $15 + (13 + 8) = 36$

$$\begin{array}{r} (13 + 8) \\ \underline{21} \\ 36 \end{array}$$

Man erkennt, dass es egal ist, wie man die Klammern setzt: $(15 + 13) + 8 = 15 + (13 + 8)$

Doch Achtung: Hier gibt es eine **Scheibvorschrift**:

Ich zeige zuerst, was man nicht aufschreiben darf:

Das ist falsch: $15 + 13 = 28 + 8 = 36$

Die meisten wissen gar nicht (mehr), was daran falsch sein soll.

Die Gleichheitsregel besagt, dass links und rechts vom Gleichheitszeichen der gleiche Wert stehe muss.

Das überprüfen wir:
$$\begin{array}{r} 15 + 13 = 28 + 8 = 36 \\ \underline{28} \quad \underline{36} \end{array}$$

Jetzt erkennt jeder den Unsinn: Hier steht $28 = 36$!

Wie kann man diesen Fehler verhindern?

Das ist ganz einfach: Man muss **immer alle Zahlen der Rechnung aufschreiben**, darf also anfangs die 8 nicht einfach weglassen, weil man sie erst später benötigt.

Die Berechnungs-Niederschrift im gelben Feld ist also richtig, die blaue Rechnung falsch.

Rechenvorteile durch Klammerregeln

Die nächste Aufgabe lautet: Berechne

$$67 + 19 + 1.$$

Wer der Reihe nach rechnet, geht so vor:

$$67 \xrightarrow{+19} 86 \xrightarrow{+1} 87$$

In der Kammerschreibweise sieht das so aus:

$$\underbrace{(67 + 19)}_{86} + 1 = 86 + 1 = 87$$

Aber wer so rechnet, schläft mit offenen Augen. Man kann auch zuerst die letzten beiden Zahlen addieren und erhält dann dies:

$$67 + \underbrace{(19 + 1)}_{20} = 67 + 20 = 87$$

Das wird jeder einfacher finden, denn da $19 + 1 = 20$ ergibt, und da man 20 viel leichter addieren kann als 19, geht das schneller. Beide Rechnungen liefern dasselbe Ergebnis:

$$(67 + 19) + 1 = 67 + (19 + 1)$$

AG

Das **Assoziativgesetz** besagt, dass es egal ist, wie man die Klammern setzt:

Beispiel:

$$(267 + 60) + 140 = 267 + \underbrace{(60 + 140)}_{200}$$

Allgemeine Formel:

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

Hinweis: Nur weil das Assoziativgesetz gilt, kann man diese Aufgabe ohne Klammern aufschreiben, denn dann kann jeder rechnen wie er will.

Diese Regel bringt natürlich nur dann einen Rechenvorteil, wenn man erkennt, dass die vordere oder die hintere Teilsumme eine „einfachere“ Zwischensumme ergibt.

Summen wie $37 + 28 + 87$ kann man so $(37 + 28) + 87$ oder so $37 + (28 + 87)$ berechnen, da wird kein Vorteil herauspringen.

Aber in Aufgaben wie $(2512 + 277) + 23 = 2512 + \underbrace{(277 + 23)}_{300} = 2812$ lohnt es sich durchaus, das Assoziativgesetz anzuwenden und nicht stur der Reihe nach zu rechnen.

Man sollte also eine Aufgabe immer überprüfen, um zu sehen, wie man günstig rechnen kann.

Trainingsaufgabe 1

a) $127 + 9 + 11$

b) $27 + 13 + 63$

c) $24 + 17 + 16$

d) $267 + 145 + 233$

e) $405 + 55 + 113$

f) $178 + 213 + 287$

Die Ergebnisse stehen am Ende des Textes.